

Matemáticas

Orientaciones didácticas

2°
Secundaria



GOBIERNO DE
MÉXICO



MEJOREDU
COMISIÓN NACIONAL PARA LA MEJORA
CONTINUA DE LA EDUCACIÓN

Contenido

Número, álgebra y variación	3
Porcentaje	4
La enseñanza del porcentaje	6
Más actividades.....	15
Forma, espacio y medida	17
Rectas paralelas cortadas por una recta transversal.....	18
Más actividades.....	25
Análisis de datos	26
Estadística.....	27
Medidas de tendencia central y el rango.....	27
Más actividades.....	34
Referencias bibliográficas	36



Matemáticas

Orientación didáctica 2° de secundaria



Relevancia

Esta orientación didáctica tiene como finalidad proporcionar a los docentes algunas estrategias de enseñanza y recursos didácticos que pueden emplear para el desarrollo y consolidación de conocimientos, habilidades, actitudes y valores del pensamiento matemático que implica, por ejemplo, competencias aritméticas, algebraicas, geométricas, estadísticas y probabilísticas.

Las estrategias de enseñanza propuestas están diseñadas con base en las tres unidades de análisis que conforman la evaluación diagnóstica: Número, álgebra y variación, Forma, espacio y medida y Análisis de datos.

En esta orientación didáctica se hace énfasis en aspectos fundamentales del porcentaje, la medida, y el análisis de datos estadísticos mediante las medidas de tendencia central: media, mediana y moda, y la medida del rango.

Asimismo, se busca que las y los estudiantes utilicen el pensamiento matemático para encontrar estrategias y procedimientos, identificar y decidir métodos y algoritmos, formular explicaciones, así como para resolver problemas y justificar sus soluciones, entre otros aspectos.

Número, álgebra y variación

En esta unidad de análisis se integran diversos conocimientos del eje de Número, álgebra y variación como son el uso de números naturales, fracciones y decimales; así como proporcionalidad, porcentajes, ecuaciones y variación.



Propósito

Presentar estrategias de enseñanza que contribuyan a fortalecer y consolidar contenidos relacionados con el eje de número, álgebra y variación; en particular, se proponen recomendaciones y estrategias didácticas para el estudio del cálculo de porcentajes, tanto por ciento y de la cantidad base.



Reactivos asociados de la evaluación diagnóstica de 2° de secundaria

Número: 1, 2, 3 y 4. Adición y sustracción: 5, 6 y 7. Multiplicación y división: 8, 9 y 10, 11. Proporcionalidad: 12 y 13. Ecuaciones: 14, 15, 16 y 17. Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes: 18, 19, 20 y 21. Funciones: 22, 23, 24 y 26.



Aprendizajes esperados de 2° de secundaria

- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales, positivos y negativos.
- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Analiza y compara situaciones lineales y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.
- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificar equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geoméricamente (análisis de figuras).
- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y reparto proporcional.



Sugerencias de estrategias de enseñanza

- **Porcentaje.** Proponga problemas en los que calcule un tanto por ciento de una cantidad y en los que se requiere conocer alguno de los siguientes datos: el tanto por ciento (tasa), la cantidad inicial (cantidad base) a la que se le aplica el tanto por ciento y la cantidad final que resulta (el porcentaje). Considere porcentajes como 1 %, 10 %, 25 %, 50 % y n %. Las situaciones deben considerar lo siguiente:
 - a) Determinar el cálculo de porcentaje de una cantidad base.
 - b) Calcular el tanto por ciento que representa una cantidad de otra.
 - c) Obtener la cantidad base, dado el por ciento y la cantidad que lo representa.
 - d) Vincular el cálculo de porcentajes con el tema de ecuaciones, particularmente, en el planteamiento y resolución de ecuaciones sencillas de primer grado.

Porcentaje

Es usual encontrar descuentos en los precios de algunos productos y servicios, cuando hay ofertas y promociones por fin de temporada u otras formas de ventas, en esos casos se hace uso del porcentaje, ya que permite expresar disminuciones de cantidades determinadas. En cuanto a los incrementos en cantidades, también se pueden expresar en porcentaje y los podemos encontrar, por ejemplo, en compras a crédito, donde el precio original aumenta de acuerdo con el porcentaje de recargo y según el número de cuotas a pagar.

En estas situaciones, puede ser suficiente un cálculo mental, rápido y correcto, para tomar decisiones y determinar si se hace una compra a crédito o en efectivo. Por lo tanto, cuando se trata de porcentajes como 50 %, 25 %, 20 % o 10 %, es posible establecer una

equivalencia, por ejemplo, el 50 %, en una situación de disminución puede representar un descuento de la mitad del precio original, o en el caso de una situación de incremento, un aumento del 10 % en una determinada compra; de esta manera el consumidor puede valorar el tipo de compras a realizar y cómo éstas pueden afectar o favorecer su bolsillo.

Si bien los reactivos elegidos en estas orientaciones se refieren a porcentajes, es importante mencionar que el contenido matemático involucra también el manejo de números naturales, fraccionarios, decimales y operaciones con ellos, así como la noción de proporcionalidad, tablas de variación proporcional, resolución de problemas de proporcionalidad por diferentes procedimientos y, por supuesto, el cálculo de porcentajes, el tanto por ciento y la cantidad base.

Cuando un contenido matemático implica tantos conocimientos, puede ser la causa por la cual se considere difícil abordarlo. En parte, porque se espera que las y los estudiantes ya dominen esos conocimientos; no obstante, se puede tomar una postura diferente, al considerarlo como una buena oportunidad para aplicar y reafirmar diferentes temas. Es en este sentido, las orientaciones dadas a continuación también tienen la intención de que el tema de porcentaje se aborde en la clase como una buena oportunidad para repasar algunos aprendizajes que quizá no se hayan consolidado aún, como es el caso de las operaciones con números decimales. A continuación, se retoma uno de los reactivos de la evaluación diagnóstica:

Una de las principales aplicaciones de los porcentajes se da en estadística, particularmente, en la presentación y el tratamiento de la información.

Uno de los propósitos de usar porcentajes es que permiten comunicar y comparar datos provenientes de bases diferentes.

Cuando el uso de porcentajes conduce a valores decimales menores que 1, se acostumbra a cambiar de base y utilizar tantos por millar o por cien mil. Por ejemplo, el número de camas de hospital por cada 1 000 personas.

Los porcentajes son un ejemplo de una cantidad relativa como también lo son los tantos por millar y por cien mil, las partes por millón, los indicadores (o índices) y las tasas.

De 1 280 alumnos que tiene una escuela, 1 088 salieron de excursión, ¿qué porcentaje representa a los alumnos que faltaron a la excursión?

- A) 117.65 %
- B) 85 %
- C) 17.65 %
- D) 15 %

Se trata de un problema en el que se pide calcular qué tanto por ciento es 1 088 de 1 280. Existen varias maneras de determinar la respuesta correcta (inciso D), veamos algunas de ellas.

1. Calcular el cociente $\frac{1088}{1280} = 0.85$, que es equivalente al 85 %, por lo que las y los alumnos que faltaron a la excursión representan el 15 % del total.
2. Calcular $1\ 280 - 1\ 088 = 192$ que representan el total de alumnos que faltaron a la excursión. Después, se calcula el cociente $\frac{192}{1280} = 0.15$, expresado en porcentaje, es equivalente al 15 %.
3. Calcular cada uno de los tantos por ciento que corresponden a los porcentajes que se presentan en las opciones de respuesta, una vez que se sabe que 192 alumnos no asistieron a la excursión, por ejemplo, se calcula el 85 % de 1 280 (inciso B), o el

17.65 % de 1 280 (inciso C) y así con cada una hasta encontrar el cálculo del porcentaje que dé como resultado 192, que corresponde a la respuesta correcta.

4. El procedimiento anterior puede simplificarse aplicando el sentido numérico a partir de la comprensión de lo que es el porcentaje. Se puede descartar la opción A), porque no es posible que hayan faltado más de 1 280 alumnos puesto que 117.65 % es mayor que el 100 % de alumnos ($117.65 \% = 100 \% + 17.65 \%$). También es posible descartar la opción B), porque el 85 % de los alumnos es más que la mitad de los alumnos (es decir, 50% de $1\ 280 = \frac{1}{2}$ de $1\ 280 = 640$) y no faltaron tantos alumnos, ya que asisten 1 088. Así que sólo queda calcular la opción C) 17.65 % y la opción D) 15 %, ambas opciones podrían ser la respuesta correcta, se calcula cada uno y el que corresponda a 192 es la respuesta correcta.

5. Plantear una regla de tres y resolver:

$$x = \frac{192 \times 100}{1\ 280} = \frac{19\ 200}{1\ 280} = 15 \%$$

Más adelante comentaremos algunos de los procedimientos que se pueden emplear para calcular el tanto por ciento de una cantidad. Por ahora es interesante analizar también cuáles pudieron ser los errores que se cometieron al elegir una de las respuestas incorrectas.

1. Quienes eligieron la opción B) 85 % es muy probable que hayan calculado el cociente $\frac{1\ 088}{1\ 280}$ y que, o bien olvidaron restar el resultado al 100 % o no se percataron que el tanto por ciento es el correspondiente a quienes faltaron y no a quienes asistieron.
2. Es posible que quienes eligieron la opción A) 117.65 % hayan realizado el cociente $\frac{1\ 280}{1\ 088} \approx 1.17647$ y buscaron la expresión de este decimal como tanto por ciento.
3. Finalmente, quienes eligieron la opción C) 17.65 % quizás calcularon el cociente $\frac{1\ 280}{1\ 088} \approx 1.17647$, y como se pedía el tanto por ciento de quienes faltaron, supusieron que era la parte decimal 17.65.

La enseñanza del porcentaje

La enseñanza del porcentaje inicia en la educación primaria y continúa en primer grado de secundaria. Resolver problemas que implican porcentajes se aborda por varias razones, como se ha visto, integra varios contenidos sustanciales de matemáticas; implica un razonamiento proporcional, el cual es un razonamiento complejo y, además, tiene un amplio uso social en diferentes contextos. Puede considerarse como un contenido matemático fundamental de la aritmética y al estar dentro del ámbito de la proporcionalidad tiene relación directa con el pensamiento algebraico, en particular con la noción de variación.

La enseñanza del porcentaje a partir del enfoque de resolución de problemas implica un tratamiento muy diferente a solamente explicar cómo calcular porcentajes. Desde 1993 la Secretaría de Educación Pública propuso el enfoque de resolución de problemas que, si bien no descarta las explicaciones, propone la enseñanza de las matemáticas a partir de plantear actividades que lleven a construir conocimientos. Un ejemplo de un modelo de explicaciones se encuentra en la generación de libros de 1972. Después de trabajar de manera muy limitada la manera de expresar los porcentajes con decimales y fracciones y de resolver sólo un problema donde las y los alumnos tenían que calcular porcentajes sencillos (50 %, 25 %,

20 %, 10 %, 5 % de 3 000) se da una explicación de un método general para calcular cualquier porcentaje (véase Figura 1).

Figura 1. Página 49 del libro de sexto grado de la generación de libros de 1972. Se explica cómo calcular porcentajes.¹

Para calcular el por ciento de alguna cantidad basta multiplicar esa cantidad por la fracción que representa el por ciento de que se trate.

Por ejemplo, si queremos calcular el 25% de 275 podemos hacerlo utilizando la fracción común con denominador 100:

$$\frac{25}{100} \times 275 = \frac{6875}{100} = 68.75$$

También puedes usar una fracción común simplificada:

$$\frac{1}{4} \times 275 = \frac{275}{4} = 68.75$$

Otra manera de proceder es utilizando la forma decimal de la fracción:

$$0.25 \times 275 = 68.75$$

Calcula los siguientes porcentajes:

50% de 122 = _____

18% de 34 = _____

60% de 200 = _____

45% de 73 = _____

70% de 140 = _____

16% de 16 = _____

0.5% de 20 = _____

25% de 100 = _____

Es probable que quienes leían el texto no comprendieran por qué se tenía que calcular el porcentaje de esa manera y terminaban aprendiendo dicho procedimiento de manera mecánica. Si se enseñara de esta manera estaríamos con un retraso de casi 40 años, con consecuencias tales como el olvido del procedimiento a realizar, la concepción de que las matemáticas son técnicas sin sentido, la no comprensión de lo que se está haciendo y de que si el resultado obtenido es o no es razonable.

Actualmente se pretende la construcción de conocimientos significativos y un posible camino para revisar el cálculo de porcentajes de acuerdo con el enfoque de resolución de problemas es el siguiente:

¹ Secretaría de Educación Pública. (1972). *Matemáticas. Sexto grado*. México. SEP. <https://historico.conaliteg.gob.mx/H1972P6MA094.htm#page/49>

- a) Iniciar con problemas donde se utilicen enunciados como los siguientes: “20 de cada 100”, “30 por cada 100”.
- b) Hay que comentar que estos enunciados pueden expresarse con una fracción, el antecedente inmediato es la fracción decimal como razón que se estudia en primaria. Así, “20 de cada 100” puede expresarse como $\frac{20}{100}$.
- c) Introducir la idea de que, al poder expresarse como una fracción, el tanto por ciento también puede expresarse con un número con punto decimal: “59 de cada 100” se puede expresar como $\frac{59}{100} = 0.59$.
- d) Introducir el símbolo %, por ejemplo: 20 de cada 100 puede expresarse como $\frac{20}{100}$ y también como 20 %.
- e) Trabajar las nociones de 50 % de una cantidad es la mitad de la cantidad, 25 % es la cuarta parte, 10 % es la décima parte y 1 % es la centésima parte de la cantidad. Hacer cálculos de estos porcentajes.
- f) Hacer cálculos con porcentajes donde se combinen los anteriores. Por ejemplo, para calcular el 36 % se puede calcular el 25 %, 10 % y 1 % y sumar los tres resultados.
- g) Hacer cálculos de cualquier porcentaje usando el 10 % y el 1 %. Por ejemplo, el 87 % se puede calcular con el 10 % y multiplicando por 8 y el 1 % y multiplicando por 7, después se suman ambos productos.
- h) Calcular cualquier porcentaje usando el 1 %. Por ejemplo, para calcular el 67 % se calcula el 1 % y después se multiplica por 67. A partir de este procedimiento se puede analizar con las y los alumnos lo siguiente:

Si para calcular el 67 % de 120 podemos calcular el 1 % y luego multiplicar por 67, lo que se está haciendo es:

$$120 \div 100 \times 67 = 1.20 \times 67$$

Y es equivalente a:

$$\frac{120}{100} \times 67 = 120 \times \frac{67}{100} = 120 \times 0.67$$

De ahí se pueden comprender los diferentes algoritmos ilustrados en la Figura 1.

Es importante que las y los estudiantes conozcan estos algoritmos y se analice el porcentaje que se quiere calcular debido a que en algunos casos hay caminos más fáciles para obtenerlo. Por ejemplo, para calcular el 50 % conviene más obtener la mitad de la cantidad que multiplicar por 0.5. Esto último también está relacionado con el desarrollo del sentido numérico que se debe favorecer.

Obsérvese todos los conocimientos que se requieren para calcular porcentajes por diversos procedimientos:

- a) Expresar una razón como una fracción: “40 de cada 100 = $\frac{40}{100}$ ”
- b) Simplificar fracciones: $\frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
- c) Expresar fracciones como números con punto decimal: $\frac{40}{100} = 0.40 = 0.4$

- d) Multiplicar por una fracción común simplificada, el 40 % de 90 puede calcularse de la siguiente manera:

$$90 \times \frac{2}{5} = \frac{90 \times 2}{5} = \frac{180}{5} = 36$$

- e) Multiplicar por un número decimal, el 40 % de 90 también puede calcularse como:

$$90 \times 0.40 = 90 \times 0.4 = 36$$

- f) Usar tablas de variación proporcional directa.

$\div 10$	100 %	90	$\div 10$
	10 %	9	
$\times 4$	40 %	36	$\times 4$

- g) Asimismo, para calcular el 40 % de 90 se puede usar la propiedad de los productos cruzados y plantear una ecuación:

100 %	90
40 %	x

$$100 \cdot x = 90 \times 40$$

Y resolverla:

$$x = \frac{90 \times 40}{100} = \frac{3\,600}{100} = 36$$

Lo anterior muestra la gran riqueza de contenidos matemáticos que pueden retomarse cuando se trabaja con los porcentajes.

Las razones como “ x de cada 100” pueden expresarse en forma de fracción con denominador 100, esto es $\frac{n}{100}$, en su fracción equivalente simplificada, como un número con punto decimal o bien usando el símbolo % que se lee “por ciento”.

$$\text{Por ejemplo: } 36\% = \frac{36}{100} = 0.36$$

A continuación, encontrará una serie de actividades que permitirán, no sólo estudiar los porcentajes, sino que constituyen una oportunidad para revisar y aplicar otros contenidos matemáticos.

1. Lilia trabaja en una tienda vendiendo ropa. Por cada 100 pesos que vende, le dan una comisión de 10 pesos. Calculen lo que Lilia ganó esta semana.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Venta (\$)	700	1 800	1 300	900	2 700
Comisión (\$)					

En total ganó: _____

En esta actividad se puede repasar cómo calcular de manera rápida y mentalmente el resultado de dividir entre 10, esto será de gran utilidad para calcular porcentajes.

2. Completen la siguiente tabla.

Razón	Usando el símbolo %	Fracción con denominador 100	Fracción simplificada	Decimal
35 de cada 100				
	70 %			
		$\frac{50}{100}$		
			$\frac{1}{5}$	
				0.45

Esta actividad da lugar a repasar varias nociones importantes, entre ellas cómo simplificar una fracción y cómo expresar un número fraccionario con punto decimal o viceversa. Asimismo, enfatizar la relación de equivalencia entre todas las expresiones que están en un mismo renglón de la tabla.

3. En una venta de liquidación una tienda de electrodomésticos pondrá todo al 50 % de su precio. Anoten a cada electrodoméstico el costo original o el costo ya con el descuento, según se pida.



Costo: \$ 230.00
Con descuento: _____



Costo: _____
Con descuento: \$ 115.00



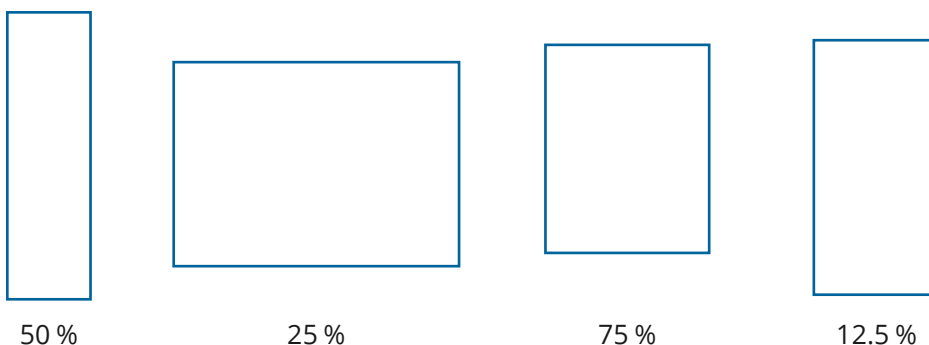
Costo: \$ 3 755.00
Con descuento: _____



Costo: _____
Con descuento: \$ 322.50

Esta actividad se puede aprovechar para desarrollar en las y los alumnos el cálculo mental de la mitad de una cantidad, desarrollar su sentido numérico y más adelante calcular porcentajes más complejos. El caso del refrigerador y el de la batidora constituyen un buen ejemplo para recordar que 0.50 equivale a 0.5 . Reafirme esto con otras cantidades ($0.800 = 0.80 = 0.8$, $0.1000 = 0.100 = 0.10 = 0.1$) y considere que este hecho no es tan obvio para las y los estudiantes como pareciera.

4. Sombrea en cada rectángulo lo que se indica.



Esta actividad permite relacionar los porcentajes con las fracciones en su acepción de parte-todo. Aproveche el caso de 75 % para solicitar diferentes equivalencias, se espera que surjan varias, por ejemplo:

$$75 \% = 50 \% + 25 \% = \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{75}{100} = 0.75 = 0.50 + 0.25$$

75 % es igual a 75 de cada 100

Establecer estas equivalencias permite enriquecer la noción de porcentaje y diferentes formas de expresarlo e incluso de calcularlo. Por ejemplo, se construye la idea de que el cálculo del 75 % de una cantidad se puede obtener a partir de calcular el 50 % y el 25 % de dicha cantidad y luego sumar ambos resultados. Esta idea contribuye a que, más adelante, no se dependa del algoritmo para encontrar porcentajes más complejos.

Analice el caso de 12.5 % con preguntas como ¿cómo se expresa este porcentaje en fracción con denominador 100?, ¿y como fracción simplificada?, ¿y como número con punto decimal?, ¿cuál es el 12.5 % de 80?, o bien, el 12.5 % de una cantidad es 6, ¿cuál es esa cantidad? Al tener claro que 12.5 % es un octavo se pueden responder las preguntas anteriores sin necesidad de hacer cálculos complejos (como multiplicar por 0.125).

5. En el restaurante “El buen comer” es costumbre dejar de propina el 10 % de lo que se consume. Calcula la propina, el consumo o el total a pagar según se pida en cada caso.

Consumo: \$ 80.00 Propina: _____ Total: _____	Consumo: \$ 50.00 Propina: _____ Total: _____	Consumo: \$ 180.00 Propina: _____ Total: _____
Consumo: _____ Propina: \$ 12.00 Total: _____	Consumo: _____ Propina: \$ 6.50 Total: _____	Consumo: _____ Propina: _____ Total: \$ 110.00

Si bien el propósito de esta actividad es calcular el 10 % (los tres primeros casos), se espera que no se tenga dificultad en resolver los casos en los que se muestra la cantidad de la propina y hay que calcular el consumo (multiplicando por 10 la propina), en un intento de

empezar a trabajar cómo calcular la cantidad base. Aproveche estos casos para repasar cómo multiplicar mentalmente por 10 con números naturales y números decimales, asimismo será útil recordar que 6.50 equivale a 6.5, y 65.0 puede expresarse como 65.

El último caso es “más complejo” porque hay que calcular tanto el consumo como la propina a partir del total, lo que se ha hecho es elegir una cantidad que se puede manejar mentalmente, se espera que no haya dificultad y que sea un antecedente para trabajar casos aún más complejos que se verán más adelante, por ejemplo, cuando se da el precio con IVA y se pide calcular el precio sin IVA.

6. La siguiente tabla muestra la población mundial aproximada en algunos años entre 2010 y 2020.²

Año	Población mundial aproximada
2017	7 722 727 000
2018	7 750 890 000
2019	7 770 521 000
2020	7 800 124 000

Considera la siguiente información.³



Suponiendo que el porcentaje de nacimientos de niños que nace con un trastorno del espectro autista (TEA) fuera el mismo a lo largo de los años enunciados, completa la siguiente tabla.

Año	2017	2018	2019	2020
Nacimientos de niños con TEA				

El propósito de esta actividad es practicar el cálculo del 1 %, es importante enfatizar que:

1 % es 1 de cada 100

$$1 \% = \frac{1}{100} = 0.01$$

² Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Poblaci%C3%B3n_mundial [Consulta: 29 de agosto de 2021].

³ Fuente: <https://www.clinicbarcelona.org/asistencia/enfermedades/trastorno-del-espectro-autista/definicion> [Consulta: 29 de agosto de 2021].

Aproveche esta actividad para recordar cómo se puede calcular mentalmente la centésima parte de una cantidad, o lo que es lo mismo cómo se puede calcular mentalmente la división entre 100.

Recordar estos hechos será de gran utilidad en el cálculo de porcentajes. Para profundizar en la noción y el cálculo del 1 % de una cantidad puede pedir que completen la siguiente tabla:

100 %	800		18.76		
1 %	8	26		0.4	$\frac{1}{4}$

Para obtener el 1 % de la cantidad base se debe dividir entre 100 la cantidad base (800) por lo que se obtiene 8, que representa el 1 % de 800. Recuerde a las y los estudiantes las estrategias de dividir por 100.

7. Completen la siguiente tabla:

100 %	50 %	25 %	10 %	1 %	75 %	60 %	35 %	76 %	61 %	36 %
80										

En las actividades 1 a 6 se trabajaron los porcentajes 50 %, 25 %, 10 % y 1 %. En esta actividad se pretende trabajar con porcentajes que sean combinaciones de los anteriores. Por ejemplo, para calcular el 61 % se puede calcular con el 50 % + 10 % + 1 %.

8. Resuelvan los siguientes problemas, considerando el impuesto al valor agregado del 16 %.

- Un producto cuesta \$ 290.00 más el IVA, ¿cuánto se tendrá que pagar en total?
- Un producto cuesta \$ 290.00 ya con el IVA incluido, ¿cuánto cuesta sin IVA?

El segundo problema de esta actividad es complejo porque se trata de encontrar la cantidad base cuando se conoce el tanto por ciento (16 %) y el resultado. Hay varias maneras de resolverlo. Se sabe que hay una cantidad en la que al aumentarle el 16 % da como resultado 290. Una manera es hacerlo probando con varias cantidades hasta encontrar aquella que cumpla esta condición. Este procedimiento, aunque pudiera ser tardado, es válido.

Otra manera es planteando una ecuación, lo que es una excelente oportunidad para repasar este contenido. Si x es la cantidad que se busca, entonces:

$$x + 0.16x = 290$$

$$1.16x = 290$$

$$x = \frac{290}{1.16}$$

$$x = 250$$

Otra manera que también da lugar a una ecuación es planteando una regla de tres, si no ha surgido al realizar las actividades anteriores, será un buen momento para repasarla.

116 %	290
100 %	x

Aplicando productos cruzados se tiene:

$$116x = (290)(100)$$

$$x = \frac{(290)(100)}{116}$$

$$x = \frac{29\,000}{116} = 250$$

9. En la fuente donde se consultó la información⁴ que se muestra en el recuadro se estimaba que la población mundial era de 7 700 millones de personas. Con base en este dato, anota dentro del paréntesis:
- En el primer párrafo la cantidad de personas que hay según el porcentaje indicado.
 - En el segundo párrafo el porcentaje de personas que corresponde a China y a India.

Un 61% de la población mundial vive en Asia (_____ millones), un 17% en África (_____ millones), un 10% en Europa (_____ millones), un 8% en Latinoamérica y el Caribe (_____ millones) y el 5% restante en América del Norte y Oceanía (_____ millones).

China (1 440 millones) e India (1 390 millones) continúan siendo los países con mayor población y representan el _____ % y _____ % de la población mundial respectivamente.

Para el primer párrafo se pueden emplear cualquiera de los diferentes procedimientos que se han trabajado hasta este momento y para completar el segundo párrafo se tiene que calcular qué tanto por ciento es una cantidad de otra. En este caso, qué tanto por ciento es 1 440 millones de 7 700 millones (para China) y qué tanto por ciento es 1 390 millones de 7 700 millones (para India). Se observa que este problema es matemáticamente similar al reactivo de la evaluación diagnóstica.

Un posible procedimiento es establecer una regla de tres:

100 %	7 700
x %	1 440

De donde resulta la ecuación:

$$7\,700x = 1\,440 \times 100$$

$$x = \frac{1\,440 \times 100}{7\,700} \approx 18.70$$

China tiene, aproximadamente, el 18.70% de la población mundial.

⁴ Fuente: <https://www.un.org/es/global-issues/population> [Consulta: 29 de agosto de 2021].

Preguntas de reflexión

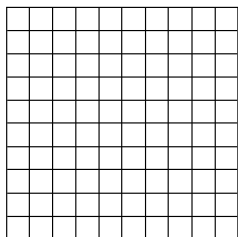


- ¿De qué formas se puede expresar un porcentaje?
- ¿Es lo mismo dividir entre 100 que multiplicar por $\frac{1}{100}$, ¿por qué?
- ¿Es lo mismo dividir entre 100 que multiplicar por 0.01?, ¿por qué?
- ¿Cómo se puede calcular el 1 % de una cantidad entera?
- ¿Cómo se puede calcular el 1 % de una cantidad con punto decimal?
- ¿Cómo se interpreta el 150 %?
- ¿Cómo se interpreta el 125 %?
- ¿Habrá casos en la vida real en donde se apliquen porcentajes mayores al 100 %? ¿cuáles?
- ¿Cómo se expresaría con el tanto por ciento la razón 100 de cada 1000?
- ¿Cómo se expresaría con el tanto por ciento a razón 5 de cada 25?, ¿0.5 de 2.5? y ¿es equivalente a 0.5 de 0.25?

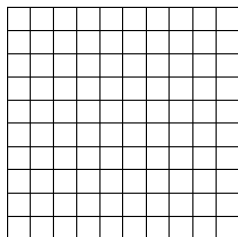
Obsérvese que aún no se ha trabajado ningún algoritmo convencional para el cálculo de porcentajes. Los algoritmos no convencionales permiten comprender, profundizar y enriquecer los conceptos antes de entrar a la mecanización. No obstante, como ya se estudió el porcentaje en primer grado, si al discutir en común con las y los estudiantes las maneras de resolver problemas surgen procedimientos convencionales como multiplicar por la fracción o el decimal correspondiente al porcentaje, o incluso la regla de tres, deben aceptarse.

Más actividades

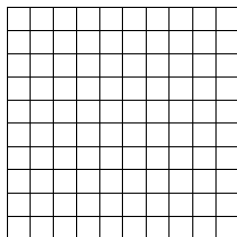
1. Coloreen el porcentaje indicado en cada caso.



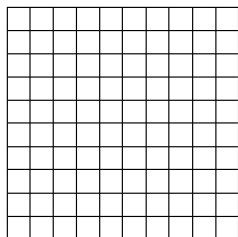
45 %



63 %



19 %



88 %

2. Calculen los siguientes porcentajes, utiliza el procedimiento que consideren más útil para cada caso.

50 % de 450 = _____

25 % de 840 = _____

75 % de 450 = _____

10 % de 840 = _____

1 % de 450 = _____

35 % de 840 = _____

77 % de 450 = _____

87 % de 840 = _____

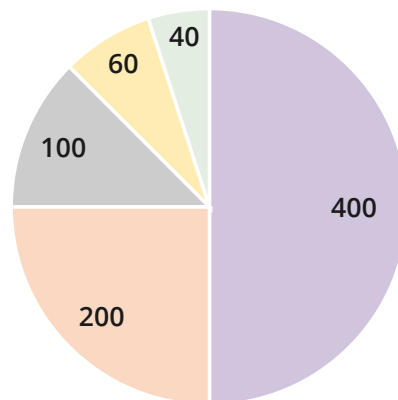
150 % de 450 = _____

125 % de 840 = _____

3. Una compañía tiene cinco inversionistas que quieren saber el porcentaje de inversión que le corresponde a cada uno y qué fracción representa de la compañía. Completen la tabla con los datos faltantes.

Inversionistas	Cantidad invertida en miles	Porcentaje de la inversión	Equivalencia en decimales	Equivalencia en fracciones
1	400	50 %	0.5	$\frac{1}{2}$
2	200			
3	100			
4	60			
5	40			
Total	800	100 %	1	1

Cantidad invertida en miles



4. Una empresa tiene una ganancia de \$ 6 500.00 diarios, de los cuales \$ 2 600.00 se utilizan en inversión. ¿Qué porcentaje de la ganancia se está invirtiendo diariamente?

Forma, espacio y medida

Esta unidad de análisis incluye dos temas: figuras y cuerpos geométricos y magnitudes y medidas. Y, en particular, algunos de los conocimientos que están implicados son: ángulos entre líneas rectas paralelas cortadas por una línea recta transversal, suma de los ángulos interiores de triángulos y rectángulos, uso de los criterios de congruencia de triángulos para probar propiedades de los cuadriláteros, cálculo del perímetro de polígonos, cálculo del área de triángulos y cuadriláteros, cálculo del volumen de prismas rectos, en todos estos conocimientos de cálculo de medidas se considera la obtención de las fórmulas y su aplicación. Estos conocimientos son previos para el logro de los aprendizajes esperados de este grado.



Propósito

Presentar estrategias de enseñanza que contribuyan a fortalecer y consolidar el tema de figuras y cuerpos geométricos, particularmente, se proponen recomendaciones y estrategias didácticas para el estudio de contenidos fundamentales como son las relaciones y propiedades de los ángulos entre líneas rectas paralelas cortadas por una línea recta transversal que permiten, por ejemplo, determinar la suma de los ángulos interiores de triángulos y rectángulos, así como la comprensión y el uso de los criterios de congruencia de triángulos para probar propiedades de los cuadriláteros.



Reactivos asociados de la evaluación diagnóstica de 2° de secundaria

Figuras y cuerpos geométricos: 26, 27, 28, 29 y 30. Magnitud y medidas: 31, 32, 33, 34, 35 y 36.



Aprendizajes esperados de 2° de secundaria

- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en reconstrucción de polígonos regulares.
- Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.



Sugerencias de estrategias de enseñanza

- **Relaciones de ángulos entre dos paralelas cortadas por una transversal.** Plantear problemas en los que se pide la prueba de las conjeturas que se hagan como parte de su resolución. Emplee contextos geométricos y no geométricos. Promueva actividades que propicien:
 - a) La comunicación. En las actividades se describan cómo logran hacer deducciones, por ejemplo, cómo deducen la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.
 - b) Actividades de dibujo que impliquen el trazo de ángulos y su medición, considerando las relaciones que se dan entre los ángulos en rectas paralelas y una transversal.
 - c) Plantear situaciones problemáticas en las que la resolución implica hacer razonamientos deductivos.
 - d) Actividades con casos generales en donde en lugar de medidas de ángulos o de lados, se nombran con letras o números.

Rectas paralelas cortadas por una recta transversal

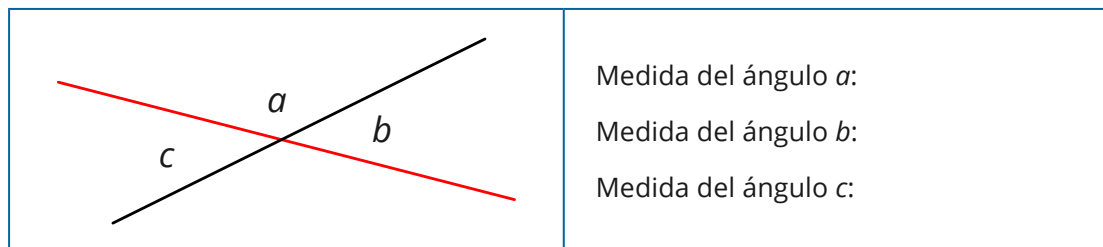
Desde las civilizaciones antiguas ya se utilizaban conocimientos de figuras y cuerpos geométricos que les permitieron, por ejemplo, hacer sus edificaciones, realizar estudios de astronomía y el desarrollo de obras de diverso tipo. Actualmente, una gran cantidad de objetos de uso cotidiano son posibles debido a la aplicación de conocimientos de Geometría.

Es conveniente que las y los estudiantes reconozcan que la geometría nos permite percibir el espacio donde desarrollamos la vida cotidiana, por ejemplo, al observar alguna habitación en una casa, se pueden identificar algunas características geométricas como su forma, que puede ser de un prisma rectangular, y sería posible considerar que tanto las paredes como el techo tiene forma rectangular; se podría decir que las paredes son planos perpendiculares al techo y éste es un plano paralelo al piso; si la habitación tiene ventanas, seguramente, éstas tienen la forma de alguna figura geométrica construida con segmentos de recta; al abrir y cerrar la puerta se forman distintos ángulos; si en el piso hay mosaicos, éstos serían figuras geométricas que cubren todo el plano sin dejar huecos ni empalmarse, es decir, forman un teselado y considerando el decorado del mosaico es posible observar algunas transformaciones geométricas.

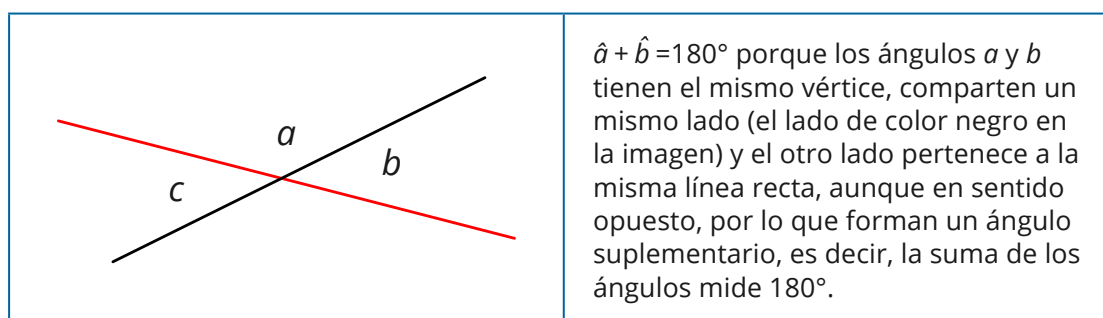
Al interactuar con el espacio, las y los estudiantes construyen y conectan relaciones y conceptos geométricos de manera intuitiva; con el estudio de la geometría se avanza en el desarrollo del conocimiento del espacio físico y la habilidad de imaginación espacial, de tal manera que se pueda prescindir de objetos concretos y manejar mentalmente imágenes de figuras y relaciones geométricas que los representa, pretendiendo interactuar con relaciones en un espacio conceptualizado. Así, llegará un momento en que, por ejemplo, la validez de las conjeturas que se realicen, sobre las figuras geométricas se comprobarán mediante razonamientos deductivos basados en reglas de argumentación matemáticas, y podrán deducir nuevas propiedades de las figuras geométricas a partir de las que ya se conozcan.

Por ejemplo, en un nivel empírico o no formal, las y los estudiantes podrían medir los ángulos de la siguiente figura y comprobar que la medida del ángulo α más la medida del

ángulo b suman 180° y, también mediante la medición, pueden encontrar que los ángulos b y c tienen la misma medida.



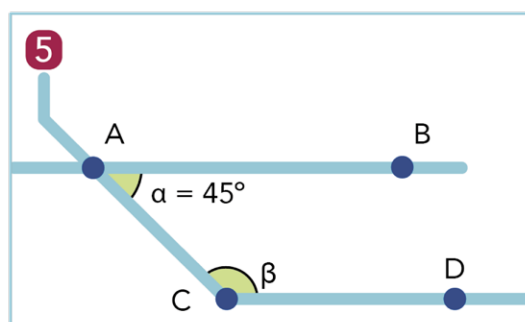
Por otra parte, en un nivel de razonamiento deductivo, las y los estudiantes no necesitarán hacer mediciones, se espera que deduzcan que los ángulos a y b suman 180° y den argumentos válidos.



Además, podrán deducir que los ángulos b y c miden lo mismo ($\hat{b} = \hat{c}$), porque: 1) la suma de los ángulos a y b es 180° ; 2) la suma de los ángulos a y c es 180° ; 3) por lo tanto, los ángulos b y c miden lo mismo. Este tipo de razonamiento deductivo se logra como resultado de la realización de una serie de actividades didácticas llevadas a cabo durante toda la educación básica.

En la evaluación diagnóstica se indagó si las y los jóvenes logran dar respuesta a una situación que implica relacionar los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal mediante el siguiente reactivo:

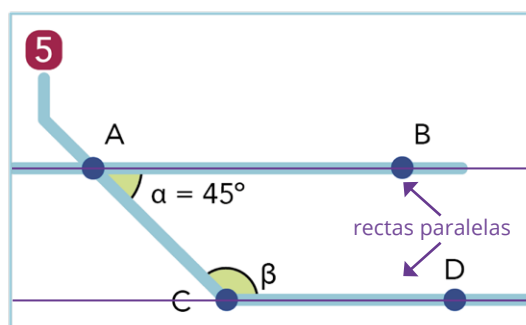
La imagen muestra una parte del mapa del Transporte Colectivo Metro. El trayecto que une las estaciones A y B es paralelo al trayecto que une las estaciones C y D. ¿Cuál es la medida del ángulo β ?⁵



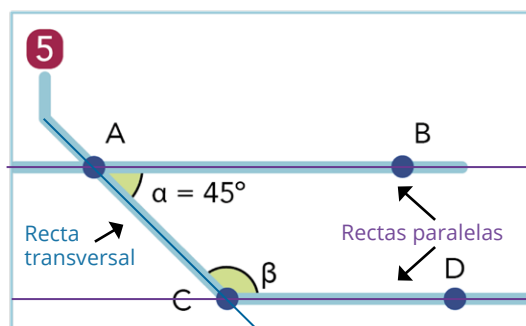
⁵ El reactivo se retomó de la Evaluación didáctica con modificaciones.

- A) 45°
 B) 120°
 C) 135°
 D) 180°

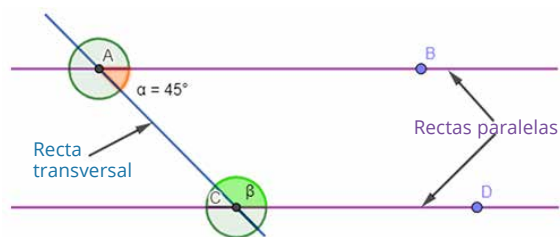
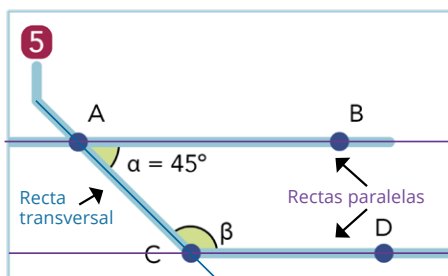
El reto principal que el reactivo plantea a las y los estudiantes es que logren visualizar y establecer la relación entre las líneas rectas que aparecen en la imagen. Dado que se trata de una parte de un mapa, es importante observar que los trayectos de A hacia B y de C hacia D se pueden representar por líneas rectas paralelas.



Por otra parte, el trayecto de A hacia C es representado por la línea recta transversal que corta a las líneas paralelas.



Una vez que se han identificado las rectas es posible visualizar el esquema completo que conduce a establecer la relación entre los ángulos que se forman.



Ya que se tiene claridad respecto a la conformación de la imagen que corresponde a la situación planteada, se puede reconocer que los ángulos α y β son alternos o colaterales internos, ya que se forman entre las rectas paralelas AB y CD y se encuentran del mismo lado de la línea transversal AC (también se le llama secante). Las y los estudiantes deben reconocer que dichos ángulos son suplementarios, lo que se puede expresar como: la suma de los ángulos colaterales internos es 180° y otra manera de expresarlo es: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$.

Dado que $\hat{\alpha} = 45^\circ$ entonces es posible sustituir su valor en la suma de los ángulos para obtener el valor de $\hat{\beta}$.

$$\begin{aligned} 45^\circ + \hat{\beta} &= 180^\circ \\ \hat{\beta} &= 180^\circ - 45 \\ \hat{\beta} &= 135^\circ \end{aligned}$$

La medida del ángulo $\hat{\beta}$ es 135° , con este resultado se obtiene la respuesta correcta a la pregunta planteada en el reactivo, inciso C.

Algunas y algunos de los estudiantes pueden tener dificultades para reconocer y establecer las relaciones entre los ángulos de las rectas paralelas cortadas por la recta transversal y cometer diversos errores que los conduzcan a elegir respuestas incorrectas. Entre los principales errores están los de lenguaje geométrico, los gráficos y los de razonamiento.

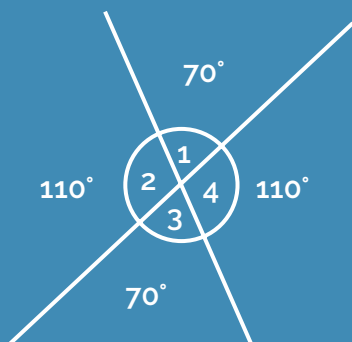
Los errores de lenguaje geométrico se asocian a confusiones en la expresión oral o escrita de la terminología y las notaciones propias de la geometría, así como a su interpretación. Esto se debe probablemente a que se producen conflictos entre la precisión que se requiere en el uso del lenguaje matemático y el lenguaje de uso cotidiano. Es posible que este error sea evidente cuando una o un estudiante lee la frase: «A y B son paralelas al trayecto que une las estaciones C y D» e interpreta inadecuadamente el planteamiento porque no relaciona las rectas paralelas de la representación gráfica y los ángulos entre ellas con la representación geométrica de rectas paralelas cortadas por una transversal.

Los errores gráficos se relacionan con la falta de habilidad para imaginar, trazar e interpretar ángulos, rectas y figuras geométricas en diversas representaciones gráficas. Al observar la imagen, la o el estudiante interpreta inadecuadamente los elementos geométricos, como los ángulos, y no establece su relación porque no visualiza adecuadamente las dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Se sabe, por ejemplo, que algunas y algunos estudiantes no reconocen como rectas paralelas a aquellas que sean de distinto tamaño. En el reactivo, puede ser que no reconozcan que los ángulos α y β están formados entre las dos paralelas y la secante, es decir, no los identifica como colaterales internos y, por lo tanto, tratan de determinar la medida del ángulo β «a ojo» y eligen 120° , la opción B.

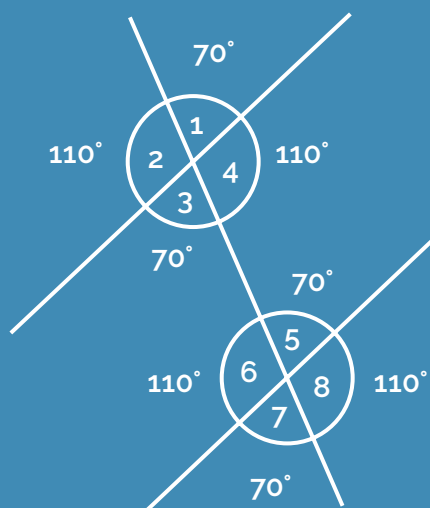
Los errores de razonamiento se asocian al mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, lo cual conlleva el manejo inadecuado de los axiomas, teoremas, corolarios y definiciones que están implicadas (no significa que deban saber el nombre de ellas). Por ejemplo, pueden llegar a reconocer que los ángulos α y β son colaterales internos, pero pierden de vista la representación gráfica y asumen erróneamente que la suma de estos es igual a 90° en lugar de 180° . En este caso, elegirán la opción A que da como respuesta 45° .

En otro posible caso, las y los estudiantes pueden considerar que los ángulos colaterales internos α y β son suplementarios, y que el resultado que se busca es el valor de la suma de ambos, es decir 180° , como se muestra en la opción D.

Cuando dos rectas se intersecan se forman cuatro ángulos, los ángulos que quedan opuestos son iguales y las parejas de ángulos adyacentes son suplementarios, esto quiere decir que la suma de sus medidas es igual a 180° . En esta figura los ángulos 1 y 3 son iguales, los ángulos 2 y 4 son iguales, los ángulos 1 y 4 son suplementarios, y los ángulos 2 y 3 son suplementarios.



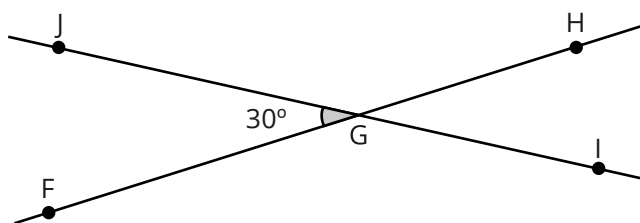
Cuando dos rectas paralelas se cortan de manera transversal por otra recta, se forman dos parejas de ángulos alternos internos («interno» significa que están al interior, o en medio de las dos rectas paralelas). En esta figura los ángulos 3 y 5 son ángulos alternos internos, y los ángulos 4 y 6 también son ángulos alternos internos.



También se pueden observar que se tienen ángulos correspondientes que tienen la misma medida se encuentran del mismo lado de la transversal y uno es externo y uno interno, como el 1 y 5, 4 y 8, 2 y 6 y 3 y 7, es decir son congruentes.

Para fortalecer la resolución de problemas y de situaciones que impliquen relacionar los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal se debe tener en cuenta que al identificar la medida de algunos de los ángulos se pueden utilizar para encontrar las medidas de los ángulos que faltan. Para avanzar en este aspecto se sugieren las siguientes actividades.

1. Observen con atención la siguiente figura y respondan las preguntas.



- ¿Cuál es la medida del ángulo formado por JGH?
- ¿Qué otro ángulo mide 30° ?
- ¿Qué otro ángulo es congruente con el ángulo formado por JGH?

En un primer paso, las y los estudiantes deben darse cuenta de que las líneas forman parejas de ángulos opuestos. En este caso, una pareja es la de los ángulos FGJ y HGI, la otra es la de JGH y FGI. Cada pareja mide lo mismo, es decir, que la primera pareja (FGH y HGI) mide 30° . La otra pareja también mide lo mismo, pero es la medida que se busca.

Un segundo paso es ver que, siguiendo la recta FH, la suma de los ángulos formados por FGJ y JGH debe dar como resultado 180° , por lo cual se debe buscar la diferencia para obtener el resultado buscado:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

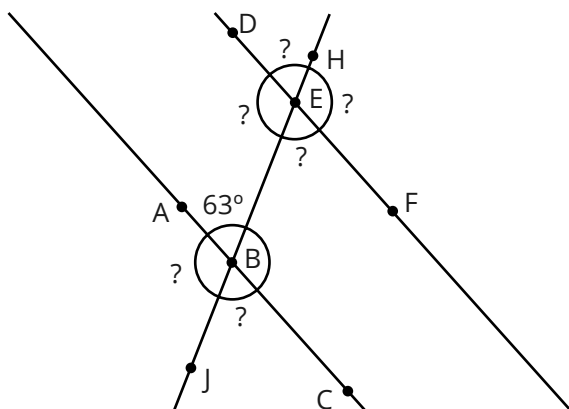
A partir de estas comparaciones y relaciones entre los ángulos, las y los estudiantes pueden elaborar sus argumentos para responder cada una de las preguntas. Es importante promover que cada uno anote sus ideas por separado y que después las compartan para comparar sus notas, ponerlas en común y enriquecerlas.

Preguntas de reflexión



- ¿Por qué la suma de los ángulos suplementarios siempre da como resultado 180° ?
- ¿Se podría dar el caso de que las parejas de ángulos formadas por dos rectas que se cruzan tengan medidas diferentes?
- ¿Se podría dar el caso de que todos los ángulos que se forman midan exactamente lo mismo?

2. Observen la siguiente figura e identifiquen las rectas paralelas y la transversal.



- Encuentren las siete medidas que faltan de los ángulos que se forman en la figura.
- Escriban paso a paso el procedimiento que siguen para resolver el problema.

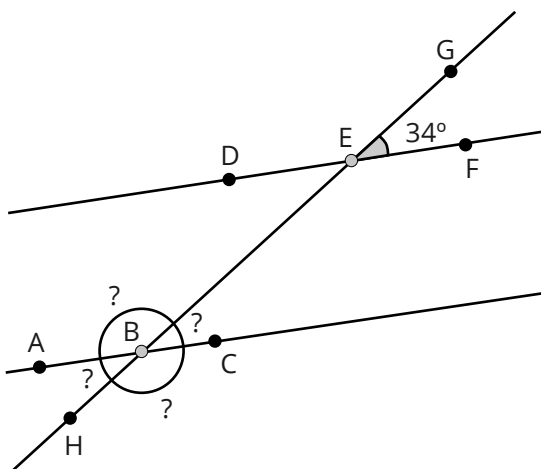
Es importante que las y los estudiantes analicen la figura para darse cuenta de que las rectas paralelas pueden estar en diferentes direcciones (horizontales, verticales o inclinadas hacia la izquierda o la derecha), y que esto mismo es válido para la recta que las interseca. Puede ser útil sugerirles que comparen esta actividad con la anterior y que identifiquen sus semejanzas y diferencias. También se les puede sugerir que recuerden que, en este caso, también se pueden identificar parejas de ángulos y que la suma de algunos de ellos siempre dará como resultado 180° .

Preguntas de reflexión



- ¿Qué pueden observar al comparar los ángulos que tienen vértice en B y los que tienen vértice en E?
- Considerando las dos rectas paralelas, ¿qué ángulos son internos y cuáles son externos?
- Los ángulos que se ubican del mismo lado de la recta transversal o secante son colaterales, en la imagen, ¿cuáles ángulos son colaterales internos?

3. A partir de las actividades anteriores, determinen las medidas de los cuatro ángulos que se forman en el punto B. Tengan en cuenta que las rectas AC y DF son paralelas.



Esta actividad es para reafirmar que las y los estudiantes logran reconocer los tipos de ángulos independientemente de la disposición de las rectas paralelas y la transversal. Una sugerencia adicional, es pedirles que busquen en algún mapa calles paralelas que sean cruzadas por una transversal, que midan uno de los ángulos y elaboren un problema que puedan compartir en clase. Pueden incluir preguntas acerca del tipo de ángulos (externos, internos o colaterales) que puedan identificar en su ejemplo.

Preguntas de reflexión

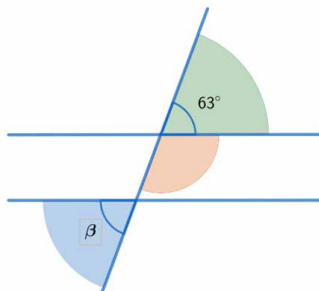


- ¿Por qué con la medida de un solo ángulo se puede conocer la medida de todos los demás?
- Además de los mapas de ciudades ¿en qué otras situaciones de la vida diaria se pueden observar rectas paralelas cortadas por una recta transversal?

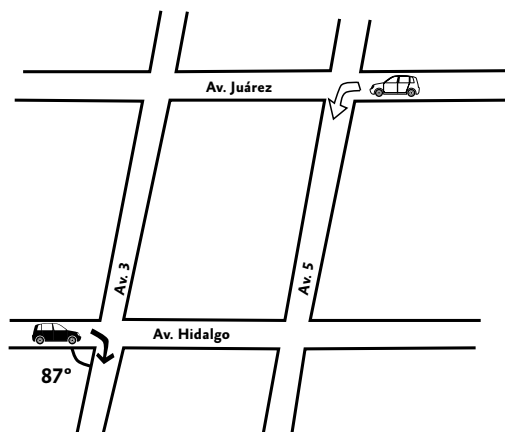
Más actividades

1. Un foco proyecta una luz verde con una amplitud de 63° como se muestra en la figura.

- ¿Cuál es la amplitud de la luz del foco azul?
- ¿Cuál es la amplitud de la luz del foco rosa?



2. El siguiente plano de una ciudad muestra que las avenidas Hidalgo y Juárez son paralelas, así como las avenidas 3 y 5. El auto negro circula por la avenida Hidalgo y para incorporarse a la avenida 3, como indica la flecha negra, tiene que hacer un giro de 87° . ¿Cuál es el ángulo de giro del auto blanco para incorporarse a la avenida 5 siguiendo la flecha blanca?



Análisis de datos

Dentro de las competencias y habilidades intelectuales que implican el desarrollo de un pensamiento crítico y de la resolución de problemas está interpretar diversas fuentes de información y evidencia a partir de las cuales se puede comprender ciertas situaciones que pasan en nuestro país y en el mundo. Dichas fuentes y evidencias pueden implicar analizar y presentar tanto datos cualitativos como cuantitativos que corresponden a situaciones diversas, entre ellas las aleatorias.

En esta unidad de análisis se promueve el diseño y aplicación de actividades de estudio que permitan analizar, interpretar, comunicar y generar información estadística y de probabilidad. También es conveniente que las actividades de estudio favorezcan la generación de datos propios de las y los alumnos para que les sean significativos los resultados.



Propósito

Presentar estrategias de enseñanza que contribuyan a fortalecer y consolidar contenidos relacionados con el eje de análisis de datos, de manera especial sobre el uso y la interpretación de medidas de tendencia central y de dispersión, como el rango.



Reactivos asociados de la evaluación diagnóstica de 2° de secundaria

Estadística: 37, 38, 39, 40, 41, 42 y 43. Probabilidad: 44 y 45.



Aprendizajes esperados de 2° de secundaria

- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.
- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide el cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.
- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.



Sugerencias de estrategias de enseñanza

- **Lectura, interpretación y presentación de información en tablas de frecuencias, gráficas de barras y gráficas circulares.** Use datos recolectados en entrevistas, encuestas o sondeos sencillos realizados a las y los compañeros, amigos o familiares, así como el uso de resultados registrados al llevar a cabo una experiencia aleatoria, por ejemplo, los resultados de un juego con dados, ruleta o volados, para

elaborar gráficas de barras, gráficas circulares y obtener las medidas de tendencia central y rango para presentar y comunicar la información estadística.

- **Medidas de tendencia central.** Determinar las medidas de tendencia central y rango de diversos conjuntos de datos homogéneos y heterogéneos. Discutir y decidir cómo se describe mejor el conjunto de datos y qué conclusiones se pueden inferir a partir de esos datos.
- **Probabilidad.** Promueva la realización de experimentos aleatorios para obtener la probabilidad frecuencial de los eventos simples.

Estadística

Como lo señala Ponce (2000) el origen de la estadística está vinculado con la necesidad de registrar impuestos y riquezas, conocer el número de habitantes en una región, saber el volumen de alimentos necesarios para una población, etc. En especial, se han encontrado registros de que los gobiernos de cada ciudad antigua se preocupan por guardar y conseguir este tipo de datos estadísticos, por lo que la estadística ha estado vinculada a las funciones o al funcionamiento de estado. De ahí que la estadística se considere como la enumeración sistemática y ordenada de datos relacionada con la economía, la política, la geografía, entre otras áreas sociales.

Por otra parte, tradicionalmente, la enseñanza de la estadística se enfoca en el trabajo numérico y de reconocimiento y aplicación de los algoritmos y procedimientos para obtener las representaciones gráficas y calcular los valores de las medidas de tendencia central y de dispersión de los datos. Sin embargo, además de las sugerencias didácticas anteriores es importante considerar otros aspectos que están implicados en su estudio. Por ejemplo, Ponce (2000) señala que es importante considerar que los datos pueden obtenerse de colecciones de diverso tipo (esto corresponde a las **variables de estudio**), de las cuales algunas podrán ser numéricas y otras no. Por ejemplo, equipos de fútbol preferidos, medios de transporte para llegar a la escuela, número de hermanos, número de hijos, altura de las personas, etc. También hace referencia a que pueden obtenerse de **universos** diferentes, por ejemplo, actividades económicas, deportivas, de salud, de ciencia, etc.

Medidas de tendencia central y el rango

Las medidas de tendencia central como la moda, mediana y media aritmética se usan como valores representativos de un conjunto de datos que pueden registrarse y corresponden frecuentemente a situaciones de la vida cotidiana como pueden ser: calificaciones, precios, salarios, mediciones, edades, estaturas, etc. Los valores de estas medidas también resumen situaciones que están relacionadas con varias disciplinas como la probabilidad, la física, la medicina, la sociología, etcétera.

Una de las características que describe la distribución de frecuencias de un conjunto de datos son las medidas de tendencia central, aunque se debe considerar que no se define en su totalidad a la distribución con ellas, sí permite tener una idea aproximada del comportamiento del conjunto de datos a manera de resumen.

En la evaluación diagnóstica se les pregunta a las y los alumnos por el valor de la mediana de un conjunto de datos sin agrupar. El reactivo es el siguiente:

Se preguntó a un grupo de personas cuántos viajes han realizado en los últimos 15 años. Los resultados fueron:

6, 7, 1, 2, 7, 7, 6, 8, 0, 6, 8, 4, 1, 0, 2, 3, 6, 0, 1, 7

¿Cuál es el valor que representa la mediana de los viajes?

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8

Para responder acertadamente, primero, se deben ordenar los datos, en seguida determinar el número total de datos que forman el conjunto debido a que cambia el procedimiento para determinar el valor de la mediana si el número de datos es par o impar, e identificar cuáles son los valores de los datos que están en las posiciones centrales.

Datos sin ordenar

6, 7, 1, 2, 7, 7, 6, 8, 0, 6, 8, 4, 1, 0, 2, 3, 6, 0, 1, 7

Datos ordenados

Mediana

5

Dato	0	0	0	1	1	1	2	2	3	4	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8
Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

10 datos por debajo
de la mediana

10 datos por encima
del valor de la mediana

La mediana es el valor medio cuando un conjunto de datos se ordena de menor a mayor. Si el número de datos es impar, es el valor del centro. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos ubicados en la posición central.

La mediana es el punto medio en el conjunto de datos. Es decir, la mitad de datos está por encima de la mediana y la otra mitad por debajo de ella.

Las y los estudiantes reconocen que se tienen 20 datos y que es un número par de datos, por lo que deben identificar los datos de la posición 10 y 11 y obtener el promedio de ellos: $\frac{4+6}{2} = 5$. Por lo tanto, el valor correcto de la mediana es la opción A) 5. Como puede observarse se tienen 10 datos por debajo de la mediana y diez por arriba de ella.

Algunos de los errores que pueden comentarse al calcular la mediana son:

Manejo errado de las definiciones. Por ejemplo, interpretar y usar inadecuadamente los significados e interpretaciones de las medidas de tendencia central: moda, mediana y media aritmética, dato mayor o menor y rango. Algunas y algunos alumnos consideran que el valor de la mediana corresponde al valor cuya posición es la décima, no toman en cuenta que el número de datos es par. Por lo que algunas y algunos alumnos eligen al 6 por ser el valor del centro ubicado décima posición del conjunto de datos sin ordenar (opción B).

Otras y otros estudiantes aplican una definición inadecuada al confundir el concepto de moda con el de mediana. Es decir, consideran a la mediana como el dato con mayor frecuencia; en este caso seleccionan la opción C), 7. También puede ocurrir que confunden a la mediana con alguno de los valores de los datos, en este caso, 8 que corresponde a la opción D y es el valor mayor del conjunto de datos.

Una causa de que se cometa este tipo de error se asocia a la expresión oral y escrita de la terminología y notaciones propias del lenguaje estadístico, debido probablemente a que en él se producen conflictos con el lenguaje de uso cotidiano.

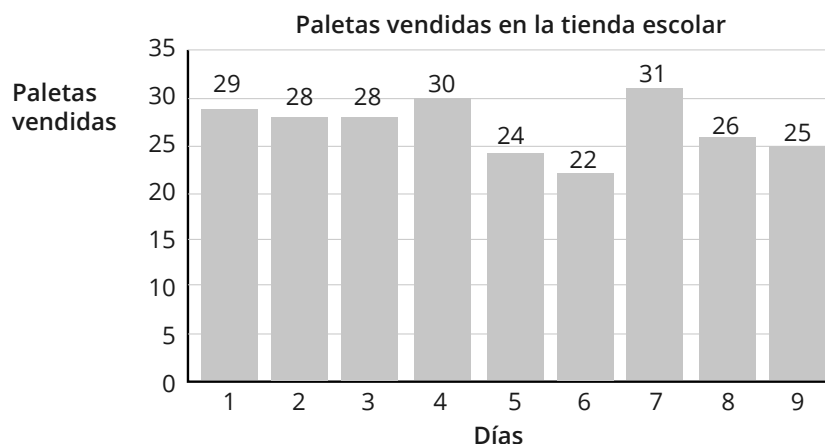
A partir de la evaluación se pretende que con éste y otros reactivos que corresponde a este tema sea posible identificar si las y los estudiantes aún presentan dificultades en la comprensión de las medidas de tendencia central, porque confunden la media aritmética con la moda, la mediana, el dato mayor o menor o el rango (Mochón y Tlachy, 2003; Mokros y Russell, 1995).

Otro aspecto que también es importante analizar en el estudio de las medidas de tendencia central son los valores que pueden tomar y de qué manera estos valores pueden ser influenciados por los datos como ocurre con el hecho de que un dato sea cero. Además, los datos pueden estar presentados en una gráfica de barras, polígonos de frecuencias y en diagramas de puntos.

A continuación, se sugieren algunas actividades que favorecen la comprensión de las medidas de tendencia central y cuál puede ser la más representativa.

1. Lean y resuelvan el siguiente problema.

La gráfica muestra la cantidad de paletas que se vendieron durante nueve días en la tienda de la escuela.



- ¿Cuántas paletas se vendieron en promedio por día?
- ¿Cuál es el número de paletas vendidas más frecuentemente?
- ¿Cuál es la mediana del conjunto de datos?
- ¿Cuál es la cantidad menor y mayor de paletas vendidas? ¿cuál es la diferencia?

Con esta actividad se busca conocer el nivel de comprensión del significado de las medidas de tendencia central de un conjunto de datos sin agrupar, en esta situación se vinculan la lectura e interpretación de gráficas de barras con las medidas de tendencia central: media aritmética, moda y mediana.

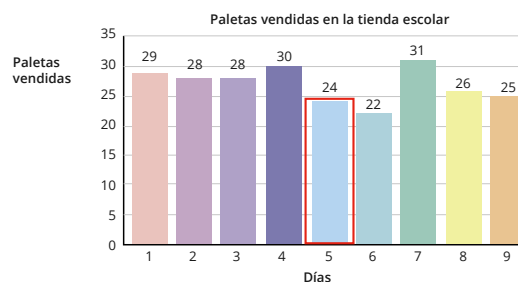
Como se puede observar cada barra corresponde a la cantidad de paletas que se vendieron en un día. Por lo tanto, para obtener el promedio de la cantidad de paletas que se vendió cada día se debe sumar el número de paletas vendidas cada día y dividir el total de la suma entre el total del número de días en que se realizaron las ventas.

$$\text{Promedio de números de paletas} = \frac{29 + 28 + 28 + 30 + 24 + 22 + 31 + 26 + 25}{9}$$

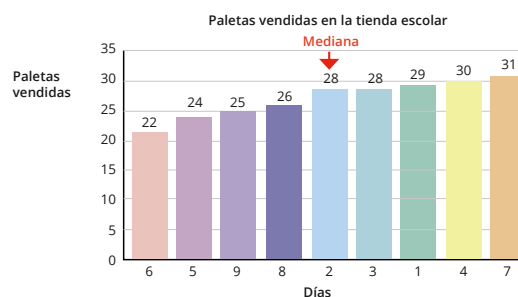
$$\text{Promedio de números de paletas} = \frac{243}{9} = 27$$

Las y los alumnos pueden considerar el valor de 22 o 31 como el promedio del número de paletas vendidas diariamente porque ellos tienen dificultades sobre el significado de la media aritmética, porque 22 es el valor mínimo de los datos y 31 el valor máximo. También pueden considerar el valor más frecuente 28 como la media aritmética. Observe como la media es 27 y se encuentra entre el valor mínimo y máximo del conjunto de datos.

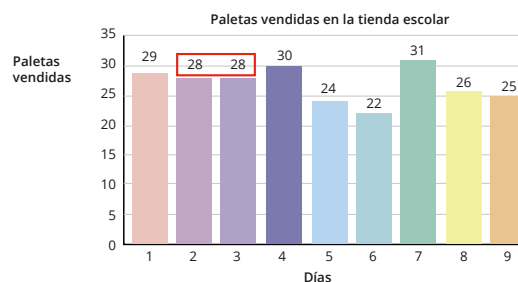
Otra de las estrategias que utilizan para obtener la media aritmética de manera equivocada es considerar el valor que queda en el centro de los datos sin tomar en cuenta si los datos están ordenados o cuáles son los valores mínimos y máximos como ocurre cuando eligen el valor de 24; porque toman el valor del dato que se encuentra al centro de la gráfica de barras y lo conciben como el promedio porque hay 4 datos a la derecha de 24 y 4 datos a su izquierda.



Las y los estudiantes tienden a confundir el significado de la mediana con el valor que se encuentra en la posición central del conjunto de datos sin tomar en cuenta que los datos no están ordenados, como se mostró en la gráfica anterior. Suelen confundir que la mediana es 24 en vez de 28. Observe que los datos están ordenados en la gráfica de la derecha y hay cuatro datos por encima de la mediana y cuatro por debajo de ella. La mediana es 28 para este conjunto de datos.



Las y los alumnos para determinar la moda, eligen el valor de 28 que es el valor más frecuente, algunas veces ellos confunden el valor modal con la media aritmética aplicando de manera incorrecta su significado. En otras ocasiones determinan a la moda como el valor de la frecuencia; como el 28 se repite 2 veces, creen que la moda es 2 y no el dato que corresponde con dicha frecuencia. En este conjunto de datos la moda y mediana coinciden.

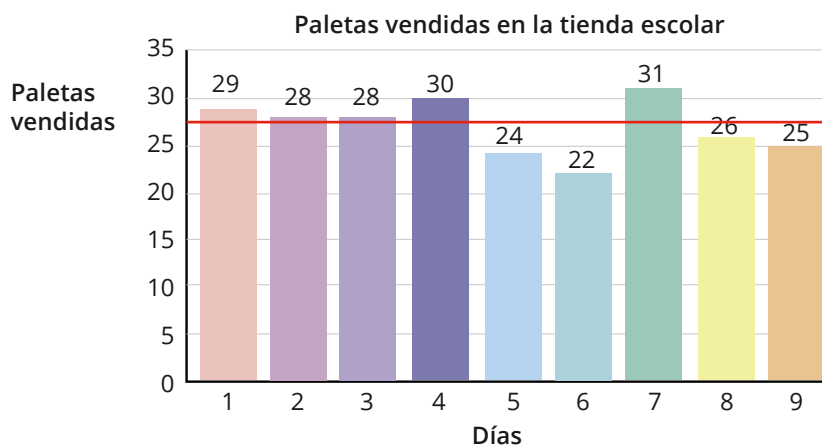


Las y los estudiantes para determinar el rango deben identificar el valor máximo y mínimo del conjunto de datos. En este caso en el día 6 se vendieron 22 paletas y el día 7, 31. Por lo que la diferencia entre la cantidad máxima y mínima de paletas vendidas es: $31 - 22 = 9$; el rango es 9.

Recuerde a las y los estudiantes que el rango indica la longitud del intervalo en el que se hallan todos los datos de la distribución. El rango pertenece a otra característica de la distribución de las frecuencias de los datos que es su dispersión.

Rango. Es el intervalo entre el valor máximo y mínimo de un conjunto de datos. Proporciona una idea de la dispersión de los datos; cuanto mayor es el rango, más dispersos son.

Es importante que las y los alumnos sean capaces de leer e interpretar correctamente los datos sin agrupar presentados en diferentes portadores como tablas simples o de doble entrada, en gráficos de barras o circulares y, a partir de ello, si es posible, determinar el valor promedio. Así como comprender el significado del promedio en datos presentados en forma de lista que no están agrupados ni organizados. Una estrategia inmediata y correcta para inferir el valor de la media aritmética es trazar una línea horizontal que pase por el centro de la distribución de los datos como se puede observar con el valor promedio de 27, un valor que está entre 22 y 31 que son los valores extremos del conjunto de datos.



Preguntas de reflexión



- Para cuáles valores de las medidas de tendencia central que resumen al conjunto de datos es necesario hacer cálculos para obtenerlas?
- ¿Cómo calculan la media aritmética de un conjunto de datos?
- ¿Cuáles valores de las medidas de tendencia central se obtienen sin hacer operaciones? y ¿de qué manera se pueden determinar?
- ¿Qué información proporciona el rango del conjunto de datos?
- ¿Será suficiente con la información que aporta el rango para determinar la variabilidad del conjunto de datos?

Propiedades de la media aritmética

(Mochón y Tlachy, 2003).

- Se localiza entre los valores extremos del conjunto de datos. La media de las edades de un grupo de estudiantes no puede ser mayor que la edad del estudiante mayor ni ser menor que la edad del estudiante más joven.
- La suma de las desviaciones respecto a la media es cero. Por ejemplo, el promedio de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 es 3.5 y, por tanto, se tiene que: $(3.5 - 1) + (3.5 - 2) + (3.5 - 3) + (3.5 - 4) + (3.5 - 5) + (3.5 - 6) = 0$.
- Es afectado por valores diferentes a él. Si el promedio de calificaciones de un estudiante durante 5 años es de 8, cualquier calificación subsecuente diferente de 8 cambiará su promedio.
- No es necesariamente igual a uno de los valores que forman el conjunto de datos. La media de 2 y 8 es 5, y 5 no forma parte de los datos promediados.
- Puede ser una fracción que no tiene contraparte en la realidad física. El promedio del número de autos que ingresa en una caseta de cobro por hora puede ser de 3.2. Este valor decimal no tiene un significado claro dentro de la variable promediada que puede tener sólo valores discretos enteros.
- Al calcular un promedio, deben ser tomados en cuenta los valores de cero. Al promediar las calificaciones de un grupo de estudiantes en un examen, debemos incluir todos los ceros que haya.
- Es un valor representativo de los valores promediados. El promedio de los sueldos de los albañiles en una región determinada es un indicador de alrededor de qué valor se centra la variable: salario.

En un conjunto de datos que se va a analizar se debe identificar los valores máximos y mínimos para determinar el valor del rango de ese conjunto. Además, una de las propiedades de la media aritmética es que su valor debe estar comprendido entre el valor máximo y el mínimo, por lo tanto, un valor de la media aritmética fuera de este rango no puede considerarse como esta. Con relación a la mediana, recuerde que el valor es representativo del conjunto de datos y debe haber la mitad de los datos por encima del valor obtenido y la otra mitad por debajo de ella.

2. El consumo histórico de energía e importe de una casa habitación es el siguiente.

Periodo	kWh	Importe
Del 16 ABR 21 al 14 JUN 21	101	\$ 101.00
Del 15 FEB 21 al 16 ABR 21	36	\$ 50.00
del 15 DIC 20 al 15 FEB 21	16	\$ 49.00
Del 15 OCT 20 al 15 DIC 20	7	\$ 50.00
Del 14 AGO 20 al 15 OCT 20	9	\$ 49.00
Del 15 JUN 20 al 14 AGO 20	10	\$ 217.00
Del 13 ABR 20 al 15 JUN 20	62	\$ 60.00
Del 11 FEB 20 al 13 ABR 20	21	\$ 49.00
Del 19 DIC al 11 FEB 20	21	\$ 48.00

- Consideren el **consumo de energía** en kilowatts hora (kWh) que se muestran en un recibo de luz y completen la tabla.

Consumo máximo (kWh)	Consumo mínimo (kWh)	Consumo más frecuente (kWh)	Consumo en la posición central al ordenar los datos (kWh)	Media aritmética (kWh)

- Consideren el importe por **consumo de energía** (kWh) que se muestran en un recibo de luz y completen la tabla.

Importe máximo (\$)	Importe mínimo (\$)	Importe más frecuente (\$)	Importe en la posición central al ordenar los datos (\$)	Media aritmética (\$)

- ¿Cuál es el consumo promedio de energía en la casa habitación?
- Si una familia habita en dicha casa, ¿cuál es el importe promedio que paga?
- ¿Qué tan variable es el importe en los periodos? Es decir, entre el importe mínimo y el máximo cuál es su diferencia.

Como se puede observar los datos no están procesados, ni agrupados, la información está organizada por períodos y la información de la parte del recibo de luz muestra el consumo e importe a pagar por el consumo en cada período de tiempo. Con la información mostrada se puede comunicar sobre el consumo promedio de energía y gastos de una familia respecto a la luz. Pueden analizar en qué meses han tenido mayor o menor consumo de energía y cuánto han gastado. Si son los que nos van a ayudar o como se manipulan. Pueden graficar los datos en una gráfica de puntos y analizar lo que ocurre con las medidas de tendencia central del conjunto de datos. Se sugiere revisar la *Orientación Didáctica. Matemáticas. 6° de primaria*.

3. Lean y resuelvan la situación que se presenta.


En 15 casas de una cuadra se realizó una encuesta en la que se preguntaba por "la cantidad de teléfonos celulares" en cada casa. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

1, 3, 2, 2, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 0, 0, 2, 1, 1

- ¿En promedio, cuál es la cantidad de teléfonos celulares que hay en la cuadra?
- ¿Cómo interpretan el promedio obtenido?
- ¿Cuál es la cantidad de celulares más frecuente que hay en la cuadra?

- ¿Qué tan variable es la cantidad de celulares en la cuadra? Es decir, entre la cantidad máxima y mínima de celulares cuál es su diferencia.
- ¿Cuál de los promedios es representativo del conjunto de datos?
- ¿Cómo afecta a la media aritmética que en las casas encuestadas no tengan celulares?

Preguntas de reflexión



- ¿De qué manera se muestran organizados los datos en las situaciones presentadas?
- ¿Cómo deben interpretarse los datos que se encuentra organizados en la tabla?
- ¿Qué diferencias hay para calcular la media aritmética en una situación y en la otra?
- ¿Cómo se debe interpretar a la mediana?
- ¿Por qué creen que es conveniente organizar y resumir los datos estadísticos?

Las medidas de tendencia central describen una característica de la distribución de frecuencias de un conjunto de datos, que nos permite tener una idea aproximada del comportamiento del conjunto de datos a manera de resumen. Es importante que las y los estudiantes no pierdan de vista esta situación a que en parte se ha debido a una enseñanza ostensiva: por estar centrada en procedimientos y algoritmos, lo cual genera ideas erróneas como que con la obtención de las medidas de tendencia central se define y describe a la totalidad de la distribución de los datos.

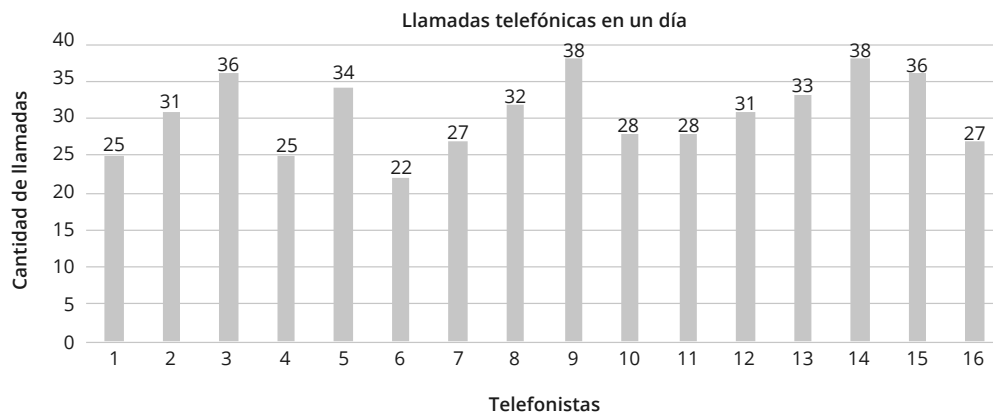
Más actividades

1. En la tabla se muestra la cantidad de dinero que ha ganado en el mes un inversionista que tiene varios negocios.

Negocio	Ganancia mensual
Venta de inmuebles	\$ 0.00
Renta de inmuebles	\$ 16 200.00
Construcción	\$ 15 340.00
Venta de ganado	\$ 25 300.00
Pescadería	\$ 10 580.00
Mercado de frutas y verduras	\$ 9 158.00
Restaurante	\$ 5 555.00
Papelería	\$ 4 322.00
Palettería	\$ 3 855.00

- ¿En cuál negocio ganó más y en cuál menos?
- ¿Cuál es el rango de ganancia considerando todos sus negocios?
- ¿Cuánto dinero en promedio ganó en el mes?
- ¿Cuál es el negocio cuya ganancia se considera la mediana en el mes?

2. Una empresa tiene en su centro de llamadas a 16 personas trabajando de manera constante. En un día se registraron la cantidad de llamadas efectivas que hace cada una de ellas y se obtuvo la siguiente información:



- ¿Cuántas llamadas se hicieron en total?
- ¿Cuál fue el número de llamadas promedio?
- ¿Qué número de telefonista hizo la menor cantidad de llamadas? y ¿cuántas llamadas hizo?
- ¿Cuáles números de telefonistas hicieron la mayor cantidad de llamadas? y ¿cuántas llamadas hicieron?
- ¿Cuál es el rango de llamadas en el día?
- ¿Para qué serviría conocer la mediana de las llamadas telefónicas en el día?

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, vol.15, pp. 2-13. https://www.researchgate.net/publication/255738435_Hacia_donde_va_la_educacion_estadistica

Broitman, C; Itzcovich, H., (1995). *Taller de resolución de problemas*. Argentina, MCBA, Dirección de Currículum.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Facultad de Ciencias de la Educación.

INEE (2008). *La enseñanza de la Geometría*. México: autor.

Mochón, S. y Tlachy, M. Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos. *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 3, diciembre, 2003, pp. 5-28. Grupo Santillana México. Distrito Federal, México. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40515302.pdf>

Mokros, J. y S. J. Russell (1995), "Children's Concepts of Average and Representativeness", en *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, núm. 1, pp. 20-39.

Open up resources (s/f) Lección 14 Ángulos alternos internos. Consultado el 30 de agosto de 2021 en: <https://access.openupresources.org/curricula/our6-8math/es/grado-8/unit-1/lesson-14/index.html>

Ponce, H. (2000). *Enseñar y aprender matemáticas. Propuestas para el segundo ciclo*. Argentina. Ediciones Novedades Educativas.

Porras, M.; Martínez, R. (1998). *La geometría del plano en la escolaridad obligatoria*. Argentina, Ediciones Novedades Educativas.

Saiz, I. (1998). *El aprendizaje de la geometría en la EGB*. Argentina, Ediciones Novedades Educativas.

Secretaría de Educación Pública. (1972). *Matemáticas. Quinto grado*. México. SEP. <https://historico.conaliteg.gob.mx/H1972P6MA094.htm#page/49>

Matemáticas 2° de secundaria. Orientaciones didácticas

Primera edición, 2021
ISBN serie: 978-607-99530-9-6
ISBN volumen: 978-607-8829-01-9

COORDINACIÓN GENERAL

Francisco Miranda López, Andrés Sánchez Moguel y Oswaldo Palma Coca

COORDINACIÓN ACADÉMICA

Juan Bosco Mendoza Vega y Mariana Zúñiga García

AUTORAS

María Margarita Tlachy Anell, Olga Leticia López Escudero, Luz Graciela Orozco Vaca y Elvia Perrusquía Máximo

REVISIÓN TÉCNICA

Julián Maldonado Luis, Juan Bosco Mendoza Vega y Mariana Vázquez Muñoz

DISEÑO GRÁFICO, EDICIÓN, ILUSTRACIÓN Y COORDINACIÓN EDITORIAL

Jaime Díaz Pliego, Carlos Edgar Mendoza Sánchez, Josué Arturo Sánchez González, Marisela García Pacheco, Blanca Estela Gayosso Sánchez, Martha Alfaro Aguilar

D. R. © Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación Barranca del Muerto 341, col. San José Insurgentes, alcaldía Benito Juárez, C. P. 03900, México, Ciudad de México.

Esta publicación estuvo a cargo del Área de Evaluación Diagnóstica de Mejoredu. El contenido, la presentación, así como la disposición en conjunto y de cada página de esta obra son propiedad de Mejoredu. Se autoriza su reproducción parcial o total por cualquier sistema mecánico o electrónico para fines no comerciales.

Cómo citar este documento:

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2021). *Matemáticas 2° de secundaria. Orientaciones didácticas*. Ciudad de México: autor.

DIRECTORIO

JUNTA DIRECTIVA

Etelvina Sandoval Flores
Presidenta

María del Coral González Rendón
Comisionada

Silvia Valle Tépatl
Comisionada

Florentino Castro López
Comisionado

Oscar Daniel del Río Serrano
Comisionado

Armando de Luna Ávila
Secretaría Ejecutiva

Salim Arturo Orci Magaña
Órgano Interno de Control

TITULARES DE ÁREAS

Francisco Miranda López
Evaluación Diagnóstica

Gabriela Begonia Naranjo Flores
Apoyo y Seguimiento a la Mejora Continua e Innovación Educativa

Susana Justo Garza
Vinculación e Integralidad del aprendizaje

Miguel Ángel de Jesús López Reyes
Administración



**GOBIERNO DE
MÉXICO**



MEJOREDU
COMISIÓN NACIONAL PARA LA MEJORA
CONTINUA DE LA EDUCACIÓN

ISBN: 978-607-99530-9-6



ISBN: 978-607-8829-01-9

